page 318 1/4 -1992.

I. E. N. A. C Mathématiques

CONCOURS EXTERNE DE RECRUTEMENT D'INGÉNIEURS DE L'ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE (IENAC)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Dans tout le problème λ désigne un paramètre réel strictement positif et F_λ est l'application de R+ dans R définie par :

$$F_\lambda : x \mapsto F_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{x^\lambda} \int_0^x \frac{u^{\lambda-1}}{1+u}\, du \qquad \forall x > 0. \end{cases}$$

I

1) a) Etablir la convergence de l'intégrale : $\int_0^x \frac{u^{\lambda-1}}{1+u}\, du$, $x > 0$.

b) Prouver que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left[F_\lambda(x) - \frac{1}{\lambda}\right] = 0$.

c) Montrer que F_λ est continue pour $x \geq 0$.

2) Calculer $F_1(x)$ et $F_{\frac{1}{2}}(x)$.

3) a) Calculer $\int_0^a \frac{dt}{1+t^3}$.

b) En déduire $F_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{8}\right)$.

4) a) Dans le cas où λ est le rapport de deux entiers strictement positifs p et q premiers entre eux, procéder au changement de variable défini par $v = u^{\frac{1}{q}}$ dans l'intégrale $\int_0^x \frac{u^{\lambda-1}}{1+u}\, du$.

b) Calculer pour $x > 0$ et pour q impair $\sum_{p=1}^{q} (-1)^{p+1} x^{\frac{p}{q}} F_{\frac{p}{q}}(x)$.

c) En déduire $F_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{8}\right)$.

I. E. N. A. C Mathématiques 1992

II

1) a) Etablir pour tout x strictement positif et pour tout entier relatif k supérieur ou égal à -1 :

$$0 < \int_0^x \frac{u^{\lambda-k}}{(1+u)^{k+2}}\,du < \frac{x^{\lambda+k+1}}{\lambda+k+1}.$$

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^{\lambda+k}} \int_0^x \frac{u^{\lambda-k}}{(1+u)^{k+2}}\,du.$

2) a) A l'aide d'une intégration par partie judicieuse, démontrer que F_λ peut se mettre pour $x > 0$ sous la forme :

$$F_\lambda(x) = B_0(x,\lambda) + C_0(x,\lambda) \int_0^x \frac{u^\lambda}{(1+u)^2}\,du$$

en déterminant les fonctions B_0 et C_0, qui sont des fractions rationnelles simples de la variable x.

b) Calculer $b_0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F_\lambda(x)$ et justifier à nouveau les conclusions du I.1).

3) a) Montrer que F_λ est dérivable pour $x > 0$ et calculer la dérivée $F'_\lambda(x) = \frac{d}{dx} F_\lambda(x)$ en utilisant le 2) a).

b) Mettre pour $x > 0$ F'_λ sous la forme $F'_\lambda(x) = B_1(x,\lambda) + C_1(x,\lambda) \int_0^x \frac{u^{\lambda+1}}{(1+u)^3}\,du.$

c) En déduire $b_1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F'_\lambda(x)$. Posant $F'_\lambda(0) = b_1$, montrer que F'_λ est continue pour $x \geq 0$.

4) a) Justifier la dérivabilité de F'_λ pour $x > 0$ puis calculer la dérivée seconde F''_λ de F_λ par rapport à x.

b) Mettre pour $x > 0$ F''_λ sous la forme :

$$F''_\lambda(x) = B_2(x,\lambda) + C_2(x,\lambda) \int_0^x \frac{u^{\lambda+2}}{(1+u)^4}\,du.$$

c) En déduire $b_2 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F''_\lambda(x)$. Posant $F''_\lambda(0) = b_2$ montrer que F''_λ est continue pour $x \geq 0$.

5) a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence établir l'existence et justifier l'expression de la dérivée $F_\lambda^{(n)}$ d'ordre n de la fonction F_λ par rapport à x pour $x > 0$ et pour tout entier naturel n.

b) Calculer $b_n = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F_\lambda^{(n)}(x)$ et compléter la définition de $F_\lambda^{(n)}$ en posant $F_\lambda^{(n)}(0) = b_n$. Etablir la continuité de $F_\lambda^{(n)}$ pour $x \geq 0$.

6) a) Vérifier que la fonction F_λ remplit les conditions de validité de la formule de Taylor–Lagrange

$$F_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_\lambda^{(k)}(0)}{k!} x^k + T_n(x)$$

où le reste T_n de Mac Laurin a pour expression : $T_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} F_\lambda^{(n+1)}(\theta x)$ avec $\theta \in]0,1[$; expliciter le développement en série entière de Mac Laurin de la fonction F_λ.

Lire " des fonctions simples ... "

b) Démontrer que la suite de fonctions (T_n) de la variable x converge uniformément vers zéro sur le fermé $[0, 1]$.

c) Que conclure pour le développement en série entière de Mac Laurin de la fonction F_λ.

III

On se propose d'étudier l'équation différentielle E_λ où y est fonction réelle inconnue de la variable réelle x :

$$E_\lambda : x\frac{dy}{dx} + \lambda y = \frac{1}{1+x}.$$

1) Montrer qu'il existe une série entière convergente dont la somme

$$U : x \mapsto U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

est solution particulière sur $]-1, +1[$ de E_λ.

2) Déterminer pour x réel non nul la solution générale de l'équation homogène associée : $x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$.

3) Se limitant au cas $x > 0$, déterminer la solution générale de E_λ :

a) En utilisant certains résultats du II. 2) et II. 3).

b) Par la méthode dite de "variation de la constante".

4) Déterminer, si elles existent, les solutions continues de E_λ sur $]-1, +\infty[$.

5) Calculer les sommes des séries numériques :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n(3n+1)}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n(3n+2)}$.

IV

Soit E l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}$ définies et continues sur $\mathbb{R}+$.

A tout $f \in E$ on associe la fonction y que l'on notera $T_\lambda f$ définie sur $\mathbb{R}+$ par :

$$y = T_\lambda f : x \mapsto y(x) = (T_\lambda f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} f(0) \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{x^\lambda} \int_0^x u^{\lambda-1} f(u)\, du \quad \forall x > 0 . \end{cases}$$

1) Montrer que T_λ est une application de E dans E.

2) Cette application est-elle linéaire ?

3) Pour tout couple (λ,μ) de réels strictement positifs on note $T_\lambda \circ T_\mu$ la composée des applications T_λ et T_μ, c'est-à-dire l'application de E dans E :

$$T_\lambda \circ T_\mu : f \to (T_\lambda \circ T_\mu) f = T_\lambda (T_\mu f)$$

Démontrer, à l'aide d'un calcul précis, que $T_\lambda \circ T_\mu$ vérifie, pour x positif ou nul et pour $\lambda \neq \mu$, une identité de la forme :

$$(T_\lambda \circ T_\mu) f(x) = K [T_\lambda f(x) - T_\mu f(x)]$$

où K est une constante à déterminer.

4) Peut-on conclure à la commutativité de T_λ et T_μ ?
